Algebry a šifry

Jak přenést tajemství?

Martin Rosenberg[1]

Seminář algebry, GNA, 2026

[1]martin.rosenberg@alej.cz

Situace

- **Alice** a **Bob** si chtějí poslat zprávu tak, aby **Eva** nedokázala přečíst její obsah
  - Komunikace mezi Alicí a Bobem je veřejná
    $\Longrightarrow$ Eva dokáže přečíst vše

Pokud Eva vidí vše, mohou Alice a Bob bezpečně komunikovat?
Mohou se Alice a Bob dohodnout na tajemství, i když je každá zpráva viditelná?

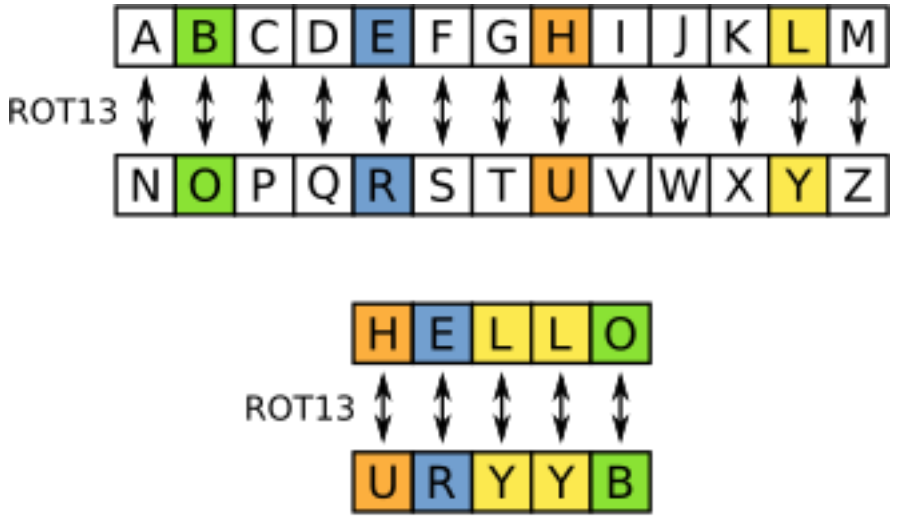
Situace

- Mohou se potkat osobně
  $\Longrightarrow$ nepraktické
- Komunikace na internetu
- Šifrování zpráv na papíře (WWII)

Šifry

Caesarova šifra (1. stol. př. n. l.)

- Substituční šifra
- Vezmu zprávu a každé písmeno nahradím písmenem jiným (posunutým)
- Posun o k, šifra $c = (m + k) \bmod 26$



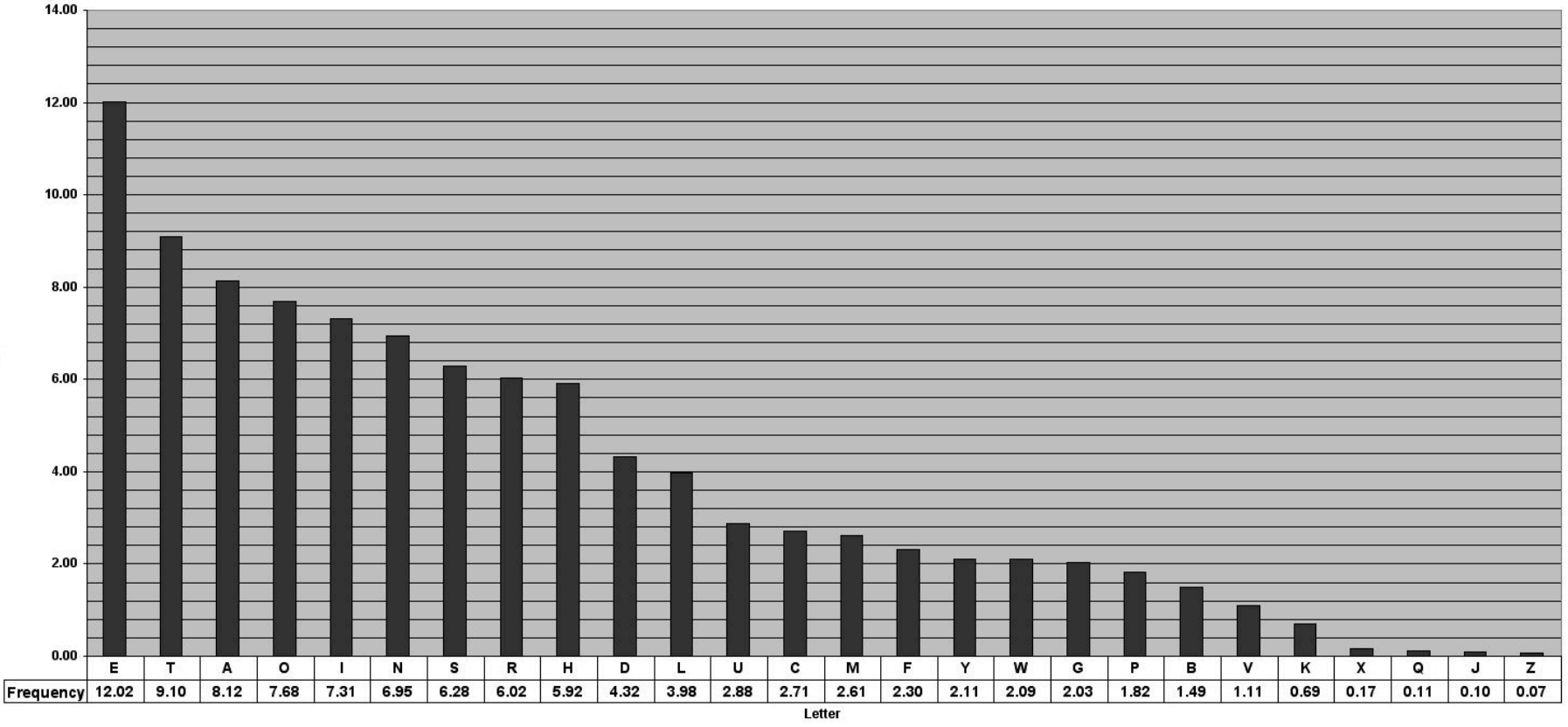
Caesarova šifra (1. stol. př. n. l.)

Pokuste se rozluštit

KHOOR ZRUOG

Útoky na CŠ

- Frekvenční analýza



	E	T	A	O	I	N	S	R	H	D	L	U	C	M	F	Y	W	G	P	B	V	K	X	Q	J	Z
Frequency	12.02	9.10	8.12	7.68	7.31	6.95	6.28	6.02	5.92	4.32	3.98	2.88	2.71	2.61	2.30	2.11	2.09	2.03	1.82	1.49	1.11	0.69	0.17	0.11	0.10	0.07

Vigenèrova šifra (Bellaso 1553, Vigenère 1586)

- Polyalfabetická substituční šifra
- Vícekrát použitá Caesarova šifra
- Výhoda: jedno písmeno se může zašifrovat vícero způsoby
- Máme text a **klíč**, podle písmen pod sebou vyhledáme zašifrované písmeno
- Ve své době označovaná za **neprolomitelnou**
  - 1863 Kasiskiho test

Vigenèrova šifra (Bellaso 1553, Vigenère 1586)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

XOR (Exkluzivní disjunkce)

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Jako disjunkce až na poslední řádek
- Pěkné vlastnosti
  - Sám sobě inverzní: $a \oplus b = c \Rightarrow c \oplus b = a$
  - Pro zafixované a je $a \oplus b$ uniformně rozdeleně
  - Sčítání ve dvojkové soustavě

One-time pad

- **Klíč** je uniformně náhodný, stejně dlouhý jako zpráva
- Zašifrování: $c = m \oplus k$
- Odšifrování: $m = c \oplus k$
- Pokud je klíč **skutečně náhodný** a **použitý pouze jednou**, je šifrový text absolutně bezpečný
  - 1949 Shannon dokázal, že OTP je absolutně bezpečný
  - Eva zná jen délku zprávy
  - Verona project (WWII): Američtí kryptoanalytici dešifrovali sovětské OTP, protože opakovali klíče

One-time pad

- Klíč musí být
  - náhodný
  - stejně dlouhý jako zpráva
  - jednorázový
- Jak může **Alice** s **Bobem** klíč nasdílet?
  - předat osobně?
  - poslat, ale to ho může vidět Eva (slepice a vejce)

Kerckhoffsův princip

Bezpečnost kryptografického systému by měla záviset pouze na utajení klíče

- Žádná *security by obscurity*
  - Algoritmy šifer jsou veřejné

Modulární aritmetika

Co to je

- Hodinová aritmetika, počítání se zbytky
  - Výsledky „přetékají“ zpět
- Slovíčko mod
- $17 \bmod 12 = ?$

Výsledek je zbytek po dělení.
To je všechno.

Co to je

Vypočítejte

$$7^4 \equiv ? \bmod 13$$

$$7^{12} \equiv ? \bmod 13$$

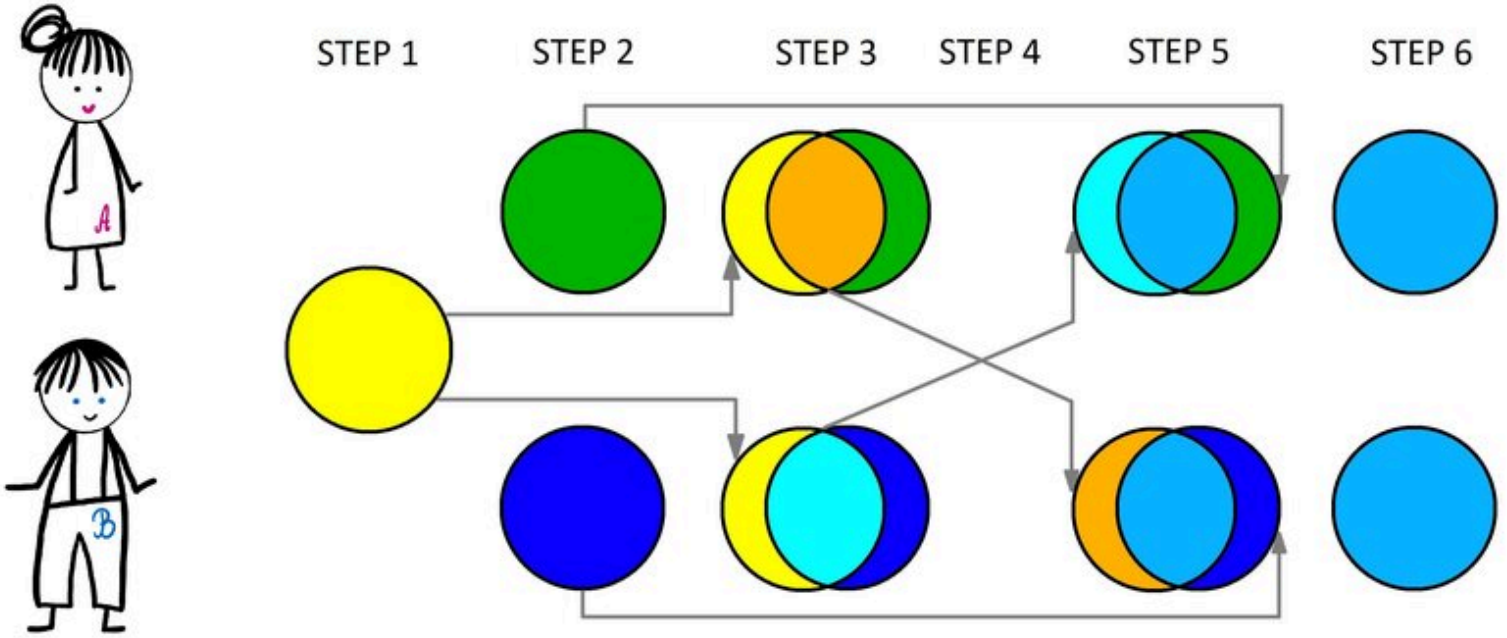
Prvočísla

- Mějme prvočíslo p
  - Pak $\{1, 2, 3, \ldots, p-1\}$ tvoří multiplikativní grupu $\mathbb{Z}_p^*$
  - Každý prvek má inverzní prvek: $a \cdot a^{-1} \equiv 1 \bmod p$
- Prvek g je *generátor*, pokud mocniny g tvoří všechny prvky $\mathbb{Z}_p^*$

Domluva

- Alice se s Bobem potřebuje domluvit na tajemství
  - Třeba na klíči k nějaké šifře
- Musí to udělat po **nezabezpečeném** kanálu
  - Eva čte vše

Diffieho-Hellmannova výměna klíčů



Diffieho-Hellmannova výměna klíčů

1. Oba znají (nemusí být tajné): prvočíslo p, generátor g
2. Alice zvolí tajné a, vypočte $A = g^a \bmod p$
3. Bob zvolí tajné b, vypočte $B = g^b \bmod p$
4. **Vymění** si A a B
5. Alice vypočte $B^a \bmod p = g^{ba} \bmod p = k$
   1. Bob vypočte $A^b \bmod p = g^{ab} \bmod p = k$

   Stejný výsledek!

- Eva zná jen g, p, A, B. Aby vypočetla k, musela by znát a nebo b

Proč DHKE funguje?

- Eva by potřebovala z $g, p, A = g^a \bmod p$ najít a
- Chtěli bychom něco jako *inverzní funkci* k mocnění v $\mathbb{Z}_p^*$

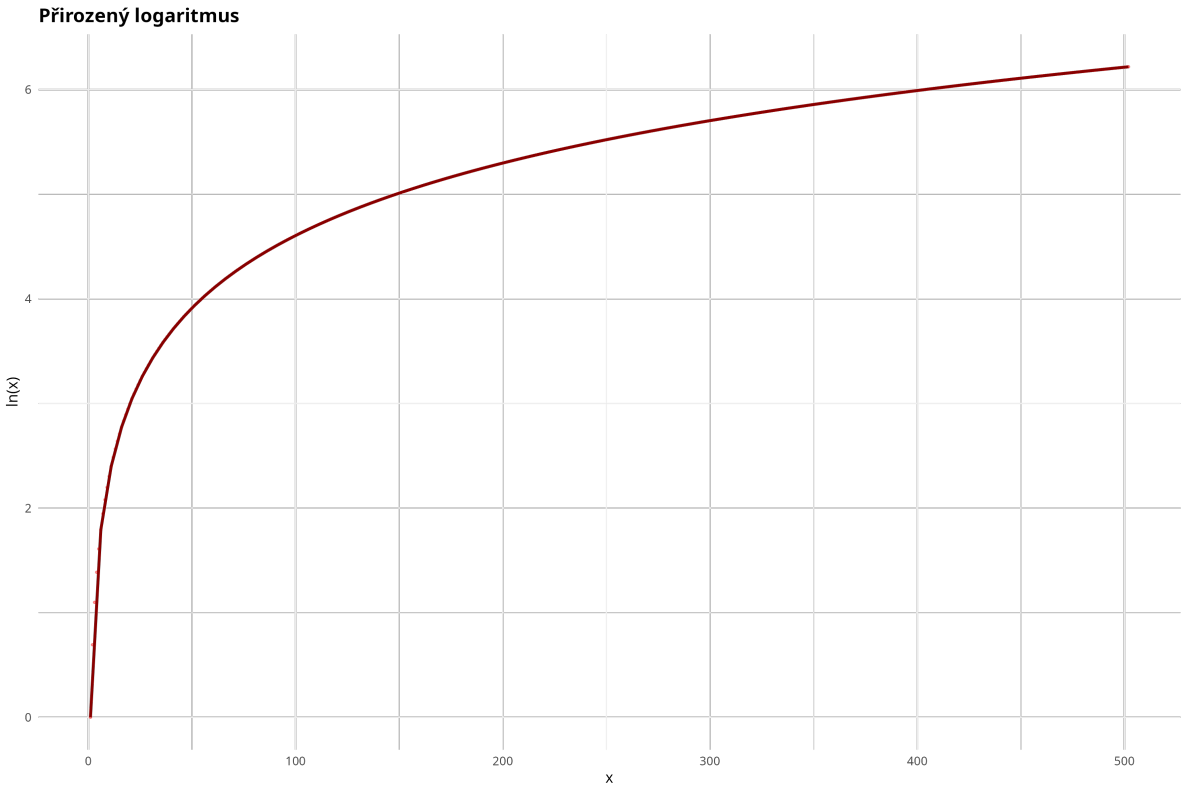
Proč DHKE funguje?

Vyřešte

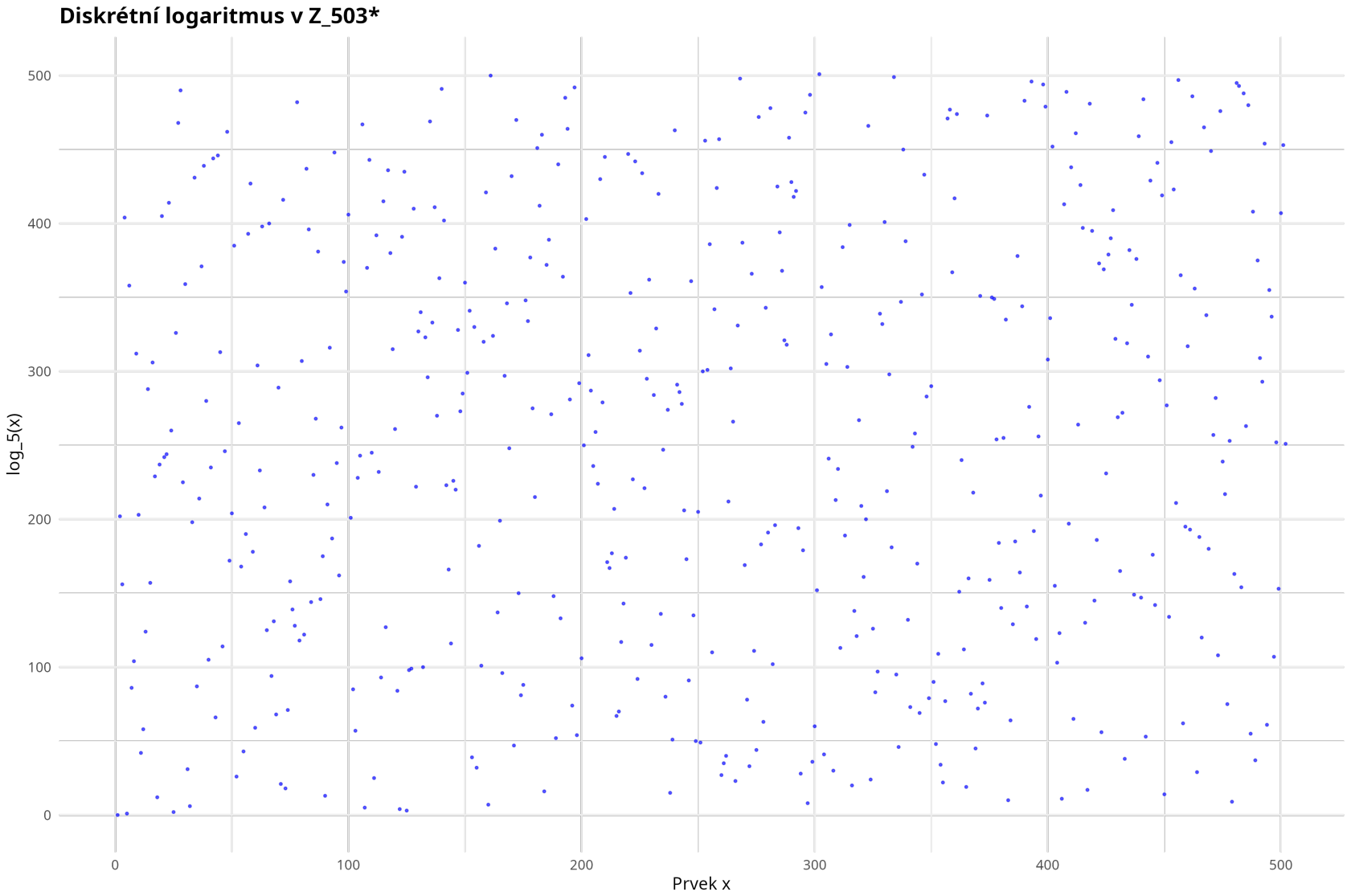
$$5^{?} \equiv 8 \bmod 23$$

Problém diskrétního logaritmu

- V reálných číslech je logaritmus monotónní, rostoucí, předvídatelný



Problém diskrétního logaritmu



Problém diskrétního logaritmu

- Nejrychlejší algoritmy na výpočet diskrétního logaritmu jsou velmi pomalé
- Nevíme, jestli existuje rychlejší algoritmus

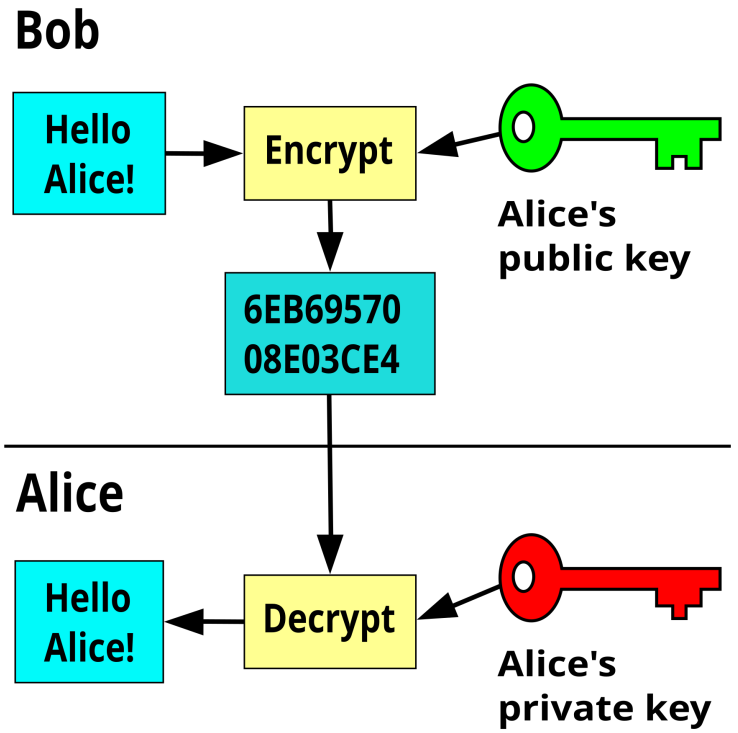
Faktorizace

Faktorizace (rozklad na prvočísla)

- Vynásobení dvou velkých prvočísel $p \cdot q = n$ je jednoduché a okamžité
- Rozložit n na p a q je složité (algoritmicky velmi pomalé)
- Analogie problému diskrétního logaritmu (one-way)
- Problém rozkladu využitý v šifrách, např. RSA

RSA

- 1977, Rivest-Shamir-Adleman
- Asymetrická šifra
  - **Veřejný** klíč slouží k šifrování zpráv adresátovi
  - **Soukromý** klíč slouží k dešifrování adresátem



Pan Euler

- Eulerova funkce $\varphi(n)$: počet všech čísel nesoudělných s n
  - $\varphi(1) = 1$
  - $\varphi(p) = p - 1$ pro p prvočíslo

Pro $n = p \cdot q$, kde p, q prvočísla platí[1]

$$\varphi(n) = \varphi(p \cdot q) = (p - 1)(q - 1)$$

Znám-li n, vypočítat $\varphi(n)$ je stejně těžké, jako rozložit n na p a q.

[1] Důkaz pomocí Čínské věty o zbytcích (CRT)

Pan Euler

- Pro n, m nesoudělné s n také platí

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$$

Ověřte pro $n = 7$ a $m = 3$

$$3^1 = 3, 3^2 = 2, 3^3 = 6$$

$$3^4 = 4, 3^5 = 5, \mathbf{3^6 = 1}$$

- Pro prvočíslo p a $m \in \mathbb{Z}_p^*$ platí $m^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
  - Malá Fermatova věta

Volba klíčů

- Vybereme prvočísla p, q, spočteme n a $\varphi(n)$
- Vezmi e nesoudělné s $\varphi(n)$[1]
  - Dvojice (n, e) tvoří **veřejný** klíč
- Najdi d tž. $e \cdot d \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
  - Inverzní prvek k e, algoritmicky rychlé[2]
  - Číslo d je **soukromý** klíč

[1] Pro RSA je častá volba číslo 65537. Při volbě p a q ověřujeme, že jsou nesoudělná.

[2] Pomocí rozšířeného Eukleidova algoritmu

Zašifrování a dešifrování

- Alice chce Bobovi poslat písmeno `A`
  - Na počítačích kódováno jako číslo $m = 65$
- Vezme Bobův **veřejný** klíč (n, e) a spočte

$$\boldsymbol{c = m^e \bmod n}$$

- Bob přijme zprávu c a použije svůj **soukromý** klíč

$$\boldsymbol{m = c^d \bmod n}$$

Proč to funguje?

$$c^d = (m^e)^d = m^{ed} \equiv m \bmod n$$

Chceme ukázat, že platí

$$m^{ed} \equiv m \bmod n$$

Bob zvolil d tak, že $ed \equiv 1 \bmod \varphi(n)$
$\Rightarrow ed = 1 + k \cdot \varphi(n)$ pro nějaké k

Proč to funguje?

$$
\begin{aligned}
c = m^{ed} &\equiv m \bmod n \\
m^{ed} &= m^{1+k\cdot\varphi(n)} = \\
&= m^1 \cdot m^{k\cdot\varphi(n)} = \\
&= m \cdot \left(m^{\varphi(n)}\right)^k
\end{aligned}
$$

Podle Eulerovy věty dostaneme

$$
\begin{aligned}
& m \cdot \left(m^{\varphi(n)}\right)^k = \\
&= m \cdot 1^k = \\
&= m \cdot 1 \\
&= m
\end{aligned}
$$

Proč je to bezpečné?

- Eva zná n, e, c
- Aby mohla dešifrovat zprávu, potřebuje $\varphi(n)$…
  - k tomu by ale potřebovala znát p a q…
  - k tomu by potřebovala rozložit n na p a q

    $\Longrightarrow$ hodně hodně hodně **těžké**
- $n \sim 2^{2048}$
  - $n \sim 10^{600}$

Proč je to bezpečné?

Kolik je 10^{600}?

- 10^{10} … stáří vesmíru v letech
- 10^{43} … počet všech možných šachových pozic
- 10^{80} … počet atomů ve vesmíru

Kam dál?

- Problémy diskrétního logaritmu a rozkladu jsou **domněnky**[1]
  - Nemusí být pravdivé, nemáme důkaz
  - Kdybychom našli způsob, jak je spočítat, celá kryptografie by se rozpadla
- Kvantové algoritmy
  - 1994 Shorův algoritmus řeší problém diskrétního logaritmu velmi rychle
    …na kvantovém počítači
  - Až budou kvantové počítače dostatečně rychlé, RSA a DHKE se rozpadnou

[1] Žádná z nich není NP-težká, ale NP. Kdyby P = NP, problém.

Kam dál?

- Nové šifry pro post-kvantovou dobu
  - 2024 NIST, ML-KEM: kryptografie neprolomitelná kvantovými počítači
    …alespoň to si myslíme
- Kde se to, co jsem vám právě ukázal, reálně používá?
  - HTTPS (zámeček)
  - WhatsApp, Signal, Messenger
  - Banky, státní instituce

Všude

Díky za pozornost!