

Generující funkce a posloupnost pana Fibonacciho

Martin Rosenberg¹

Gymnázium nad Alejí

¹martin.rosenberg@alej.cz

Posloupnosti

- Máme dva druhy:
 - Aritmetickou (přičítáme stále stejné číslo)
 - Geometrickou (násobíme stále stejným číslem)

$$\begin{aligned} & (1, 4, 7, 10, 13, \dots) \\ & = (1 + 3n \mid n \in \mathbb{N}_0) \\ & \quad q = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1, 2, 4, 8, 16, \dots) \\ & = (1 \cdot 2^n \mid n \in \mathbb{N}_0) \\ & \quad q = 2 \end{aligned}$$

Součet posloupností

- Umíme vždy sečíst nekonečnou posloupnost?
 - Ne, například $1 + 1 + 1 + \dots$ ani $1 + 2 + 3 + \dots$ sečíst neumíme
 - Říkáme, že *divergují*
- Pokud ale umíme posloupnost sečíst, říkáme, že *konverguje*

Geometrická řada

- *Geometrická řada s kvocientem q* je řada tvaru $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$
- Když $|q| < 1$, řada konverguje a platí, že její součet je $\frac{a}{1-q}$.
- Proč?

Odvození vzorce pro součet

- Součet řady je limita částečných součtů
- Prvních n členů má součet $S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$q \cdot S_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

$$\begin{aligned} S_n - q \cdot S_n &= (a + \cancel{aq} + \cancel{aq^2} + \dots + \cancel{aq^{n-1}}) \\ &\quad - (\cancel{aq} + \cancel{aq^2} + \dots + \cancel{aq^{n-1}} + aq^n) \end{aligned}$$

$$S_n - q \cdot S_n = a - aq^n$$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q}$$

Fibonacciho posloupnost

- 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
- Je daná rekurencí

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n-1} + F_n \forall n \in \mathbb{N}_0$$

- Chtěli bychom vzorec, do kterého bychom prostě dosadili n a vyhodil by nám Fibonacciho číslo F_n
 - Rekurence je zdlouhavá, nešikovná...

Sidenote: Zlatý řez

- Limita dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel je zlatý řez

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- Je všude v přírodě, rostliny, apod.

Generující funkce

Definice: Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nekonečná posloupnost reálných čísel. Pak *generující funkce* této posloupnosti je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Například posloupnost $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ má generující funkci

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \\ &= \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

Fibonacci

- *Úkol:* Najděte generující funkci Fibonacciho posloupnosti.
- $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ má generující funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$.
- Teď už si budeme jenom hrát...

Fibonacci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \quad \blacktriangleleft \text{ Vytknout dva první členy }$$

$$= F_0 + F_1 x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^n \quad \blacktriangleleft \text{ Přesumovat }$$

$$= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+2} x^n \quad \blacktriangleleft \text{ Vyčíslit známé členy }$$

$$= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (F_n + F_{n+1}) x^n \quad \blacktriangleleft \text{ Přepsat podle definice }$$

Fibonacci

$$= x + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (F_n + F_{n+1}) x^n$$

$$= x + \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) + \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^n \right) \quad \blacktriangleleft \text{Roznásobit}$$

$$= x + \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) + \left(x \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1} x^{n+1} \right) \quad \blacktriangleleft \text{Vynásobit}$$

$$= x + \left(x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) + \left(x \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \right) \quad \blacktriangleleft \text{Protože } F_0 = 0$$

$$= x + x^2 f(x) + x f(x) \quad \blacktriangleleft \text{Z definice}$$

Generující funkce a posloupnost pana Fibonacciho

Fibonacci

$$= x + x^2 f(x) + x f(x)$$

$$f(x) = -\frac{x}{x^2 + x - 1}$$

◀ Vytkneme

$$= -\frac{x}{\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

◀ Kvadratická rovnice

$$= -\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

◀ Parciální zlomky

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + x \frac{2}{1+\sqrt{5}}} - \frac{1}{1 + x \frac{2}{1-\sqrt{5}}} \right)$$

Fibonacci

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + x \frac{2}{1+\sqrt{5}}} - \frac{1}{1 + x \frac{2}{1-\sqrt{5}}} \right) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 - x \frac{1-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{1 - x \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n x^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n
 \end{aligned}$$

Fibonacci

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} \\ &= \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Základní posloupnost

- Pro naše potřeby budeme používat hlavně jednu posloupnost

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \dots = \frac{1}{1 - x}$$

... což je ta předchozí posloupnost kde $a = 1$, $q = x$.

Manipulace generujících funkcí

- Značení:* Pro posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je $a(x)$ její generující funkce.

Posloupnost

$$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\{a_n - b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$x^k a(x)$$

$$\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$$

Generující funkce

$$a(x) + b(x)$$

$$a(x) - b(x)$$

$$ca(x)$$

$$a(cx)$$

$$\underbrace{0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots$$

$$a'(x)$$

Naše startovní posloupnost (většinou) bude $1, 1, 1, \dots$

Slovní úlohy

V cukrárně prodávají tři druhy zákusků – větrníky, kremrole a punčové dortíky. Kolika způsoby lze koupit 12 zákusků tak, aby se od každého druhu koupily alespoň dva zákusky a přitom nejvýš tři kremrole?

1. Problém převedeme na polynomy
2. Řešení problému převedeme na “jaký je koeficient u x^c v nějakém polynomu?”

Může se hodit:

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{n-1} x^k$$

Slovní úlohy

Kolika způsoby lze naplnit košík n ovocnými plody za následujících (poněkud neobvyklých) podmínek?

- Počet jablek musí být sudý,
- počet banánů je dělitelný pěti,
- v košíku jsou nejvýše čtyři pomeranče
- a jedna nebo žádná hruška.

Díky za pozornost!

Nějaké otázky?

Díky za pozornost!

Zdroje

- I. Penev: Combinatorics and Graph Theory 1 & 2
- H. S. Wilf: generatingfunctionology
- Cvičení KaG1 Pepy Tkadlece, MFF CUNI