

Generující funkce a posloupnost pana Fibonacciho

Úloha 1: Určete, zda jsou následující posloupnosti aritmetické nebo geometrické.

1. $(2, 4, 6, 8, 10, \dots)$
2. $(3, 9, 27, 81, \dots)$
3. $(5, 10, 20, 40, 80, \dots)$
4. $(10, 7, 4, 1, -2, \dots)$

Posloupnost	Generující funkce
$\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x) + b(x)$
$\{a_n - b_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(x) - b(x)$
$\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$	$ca(x)$
$\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$	$a(cx)$
$x^k a(x)$	$\underbrace{0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots$
$\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$	$a'(x)$

Tabulka 1: Způsoby práce s generujícími funkcemi

Úloha 2: Pro následující posloupnosti určete jejich generující funkce.

1. $(0, 0, 1, 1, 1, \dots)$
2. $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$
3. $(1, 3, 10, 28, 82, \dots)$
4. $\ast (1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, \dots)$
5. $\ast (1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, \dots)$

Úloha 3: Posloupnost $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ má generující funkci $f(x)$.

1. Jakou generující funkci má posloupnost $(0, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$?
2. Jaká posloupnost má generující funkci $xf(x)$?
3. Jaká posloupnost má generující funkci $f(-x)$?
4. $\ast$ Jaká posloupnost má generující funkci $f'(x)$?

Kuchařka 1 (Rekurence $\rightsquigarrow$ Vzorec pro n -tý člen):

1. Jako $f(x)$ označte generující funkci hledané posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.
2. Podobně napište posloupnosti, které mají generující funkce $xf(x)$ a $x^2f(x)$.
3. Přičtěte k $f(x)$ vhodné¹ násobky $xf(x)$ a $x^2f(x)$ tak, aby se vám hodně věcí vynulovalo.
4. Vyjádřete $f(x)$ jako zlomek, který má v čitateli a jmenovateli polynomy v x .
5. Pokud je to potřeba², rozložte tento zlomek na parciální zlomky.
6. Ke každému zlomku zvlášť najděte odpovídající posloupnost.

Úloha 4: Pro následující rekurence najděte vzorec pro n -tý člen posloupnosti.

1. $a_0 = 2, a_1 = 5$ a $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$
2. $a_0 = 2, a_1 = 1$ a $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$

Užitečné vzorečky

Posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$ má generující funkci $\frac{1}{1-x}$.

Zobecněná binomická věta: $(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \dots$

Obráceně: $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1+k}{n-1} x^k$

¹Vhodné v tomto případě znamená rozumně vykoukané z rekurentního vztahu.

²Což většinou bude.